O número de Neper (e)

É conhecido como número de Neper ou número de Euler.
"e" é o "irmãozinho" mais novo, quando comparado com o seu único rival π. Enquanto o número irracional π tem um grande passado que remonta à Babilónia, a constante e é jovem, cheia de energia e está sempre presente quando falamos em crescimento.
Relativamente às populações (pessoas, animais ou plantas), ao dinheiro ou outras quantidades físicas, os fenómenos de crescimento estão quase sempre associados ao número irracional e. A desintegração radioactiva é outro fenómeno também explicado através de uma lei onde intervém o número de Neper.
O seu valor aproximado, com 5 casas decimais é 2, 71828.
Por que razão é tão especial? Não se trata de um número qualquer mas sim de uma das constantes matemáticas mais famosas.
e viu a luz do dia no séc. XVII quando muitos matemáticos investiam as suas energias na clarificação da ideia de logaritmo (brilhante invenção que permite que a multiplicação de números enormes seja convertida em adição).

Mas a sua história só começa realmente com Jacob Bernoulli e o estudo dos juros compostos, em 1683.

Suponha que depositamos 1 euro, num depósito a prazo de 1 ano, que rende 100% ao ano. (100% = 1)
Passado um ano teremos 2 euros.
Mas se o depósito render 50% por semestre ao fim de um ano (2 semestres) teremos 2, 25 euros. Porquê?

$$\mathbf{50\% = 0{,}5 = \frac{1}{2}} \quad ; \quad \mathbf{1 + \frac{1}{2} = 1{,}5}$$

Fim do 1º semestre = $1 \times 1{,}5 = 1{,}5$

Fim do 2º semestre = $1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$

E ... se o depósito render 25% por trimestre, ao fim de um ano (4 trimestres) teremos, aproximadamente, 2,44 euros. Porquê?

$$\mathbf{25\% = 0{,}25 = \frac{1}{4}} \quad ; \quad \mathbf{1 + \frac{1}{4} = 1{,}25}$$

Fim do 1º trimestre = $1 \times 1{,}25 = \quad 1{,}25$

Fim do 2º trimestre = $1{,}25 \times 1{,}25 = \quad 1{,}25^2 = 1{,}5625$

Fim do 3º trimestre = $1{,}5625 \times 1{,}25 = \quad 1{,}25^3 = 1{,}953125$

Fim do 4º trimestre = $1{,}953125 \times 1{,}25 = 1{,}25^4 = 2{,}44140625$

E ... se o depósito render $\frac{1}{12}$ por mês (aproximadamente 0,833333333, ou seja, cerca de 8%) quanto teremos ao fim de um ano?

$$\text{Fim do 1º mês} = 1 \times \left(1+\frac{1}{12}\right)$$

$$\text{Fim do 2º mês} = 1 \times \left(1+\frac{1}{12}\right)^2$$

$$\text{Fim do 3º mês} = 1 \times \left(1+\frac{1}{12}\right)^3$$

(...)

$$\text{Fim do 12º mês} = 1 \times \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$$

Aproximadamente, 2,61304 euros.

O que sucede se continuarmos a estreitar o período dos juros (em cada semana, em cada dia, em cada minuto...)?

Compounding each ...	Accrued sum
year	£2.00000
half-year	£2.25000
quarter	£2.44141
month	£2.61304
week	£2.69260
day	£2.71457
hour	£2.71813
minute	£2.71828
second	£2.71828

Quanto mais estreito for o período em que os juros são compostos, mais o total obtido ao fim de um ano se aproxima do valor de e.

A demonstração de que e é um número irracional (não é uma fracção) foi feita por Leonhard Euler em 1737. O matemático francês Joseph Liouville mostrou, mais tarde, que e não é solução de nenhuma equação quadrática. Em 1873, Hermite provou que e é um número transcendente.

As relações entre e e π também são fascinantes. Os valores de e^{π} e de π^{e} são muito próximos, facilmente se verificando que o primeiro é ligeiramente maior que o segundo.

$$e^{\pi} \cong 23,14069 \qquad \text{e} \qquad \pi^{e} \cong 22,45916$$

O número e^{π} é conhecido como a constante de Gelfond e já foi provado que se trata de um número transcendente.

Sobre π^{e} são conhecidos menos factos. Ainda ninguém provou que ele é irracional...

Alguma Cronologia :

1618 – O matemático escocês John Napier (Neper) encontra uma constante cujo valor aproximado é 2, 71828 , no seu trabalho com os logaritmos.

1727 – Euler começa a representar esse número pela letra e.

1748 – Euler consegue calcular o valor do tal número com 23 casas decimais. Até hoje é-lhe atribuída a descoberta da famosa igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0$, considerada uma das mais belas fórmulas matemáticas.

1873 – Charles Hermite prova que e é um número *transcendente*.

2007 – O valor de e é calculado com 10^{11} casas decimais (evidentemente, com auxílio de computadores e software adequado).

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Nota : Nesta igualdade, onde só intervêm constantes – não há variáveis – a letra i representa um número não real, designado por unidade imaginária e cujo valor é... raiz quadrada de -1 .

Traduzido e adaptado por Ana Baltazar, a partir de:
Tony Crilly, "50 mathematical ideas you really need to know",
London 2007